
Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

7 februarie 2026

Clasa a 12-a

Barem de notare

Subiectul 1 (21p)

- a) verificarea comutativității... ..3p
verificarea asociativității.....3p
existența elementului neutru.....2p
orice element este simetrizabil.....2p
funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \log_2 x$ este morfism2p
și bijectivă.....2p
b) se ajunge la $mn = m + n$ 2p
relația devine $(m - 1)(n - 1) = 1$ de unde $m = n = 2$ sau
 $m = n = 0$ 3p
Convine doar $m = n = 2$ 2p

Subiectul 2 (21p)

- a) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin x + \arcsin y) \in [-1,1]$ 7p
b) elementul neutru este $e = 0$ 3p
 $(x \circ y) \circ z = \sin(\arcsin(\sin(\arcsin x + \arcsin y)) + \arcsin z)$ 5p
 $x, y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(x), \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ deci $\arcsin x + \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de unde deducem că $\arcsin(\sin(\arcsin x +$

$\arcsin y)) = \arcsin x + \arcsin y$. Prin urmare $(x \circ y) \circ z = \sin(\arcsin x + \arcsin y + \arcsin z)$. În mod similar $x \circ (y \circ z) = \sin(\arcsin x + \arcsin y + \arcsin z)$,

de unde

concluzia... ..6p

Subiectul 3 (21p)

a) Vom demonstra prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$, Pentru $n = 1$ afirmația este verificată.....

... ..2p

Presupunem că $F_n(x) = \frac{x^n}{n!} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right)$. Atunci

$$F_{n+1} \in \int F_n(x) dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)' \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right) dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right) - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + C \dots \dots \dots 8p$$

Impunând condiția ca $\lim_{x \rightarrow 0} F_{n+1}(x) = 0$, obținem

concluzia... ..3p

b) Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot F_n(1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} \dots \dots \dots 2p$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}$ (conform Lemei lui Stolz-Cesaro)3p

$= \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\frac{n}{n+1}}{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{-1}{1} = -1 \dots \dots \dots 3p$

Subiectul 4 (21p)

Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[a, x] \Rightarrow \exists c_x \in (a, x)$ astfel ca $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a)$6p

Deoarece $(b - a)f'(x) \leq k$ pentru orice $x \in [a, b]$ obținem că

$f(x) \leq \frac{k}{b-a}(x - a) + f(a) \dots \dots \dots 4p$

Integrând relația de mai sus avem $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \left(\frac{k}{b-a}(x-a) + f(a) \right) dx = \frac{k}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) \Big|_a^b + f(a)x \Big|_a^b \dots\dots\dots 4p$

$= \frac{k}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) + f(a)(b-a) = \frac{k}{b-a} \cdot \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} + f(a)(b-a) \dots\dots\dots 4p$

deci $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{k}{2} + f(a) \dots\dots\dots 3p$